

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème.
La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures
seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1

- (a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E) : 13x - 84y = 7$
(b) Montrer que pour tout couple solution $(a; b)$ de (E) ,
on a : $\text{pgcd}(a; b) = 1$ ou $\text{pgcd}(a; b) = 7$
- Déterminer les solutions $(a; b)$ de (E) telles que a et b soient premiers entre eux
- Déterminer les solutions $(a; b)$ de (E) telles que : $\text{pgcd}(a; b) = 7$

Exercice 2

Soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_{a,b}(x) = a \sin x + b \sin 3x$, où a et b désignent deux réels

- Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$. $f'_{a,b}$ et $f''_{a,b}$ désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de $f_{a,b}$
- Déduire les primitives de $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$
- (a) Déterminer la primitive de $f_{a,b}$ dont la courbe représentative passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et a une tangente au point A parallèle à la première bissectrice.
(b) Soit f la fonction définie en x par : $f(x) = -\sin x + 2 \sin 3x$,
et F une primitive de f .
Ecrire une équation de la tangente à la courbe de F au point A
parallèle à la première bissectrice

Exercice 3

Soit g la numérique d'une variable réelle x définie par : $g(x) = (x+2)e^{-x}$.

Soit C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique sur les axes : 2 cm.)

- (a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
(b) Montrer que l'axe des abscisses est asymptote et l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe C_g
(c) Tracer la courbe C_g
- Soit (Δ) le domaine plan limité par les droites d'équations $x = -2$; $x = 0$; $y = 0$, la courbe C_g et la droite (D) d'équation $y = 2x + 4$.
Calculer les coordonnées des points d'intersection de (D) et de C_g .
Calculer l'aire de (Δ) .
- Soit $ABCD$ un carré direct du plan de centre I et de côté a ,
 S la similitude directe de centre A qui transforme C en B .
(a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S
(b) Montrer que I est l'image de D par S .
(c) En déduire l'aire de $S(\Delta)$, image de (Δ) par S .

PROBLEME

Le problème comporte trois parties indépendantes,
Le candidat se doit de traiter les trois parties.

Partie A

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif. Montrer par récurrence que : $(1 + nx) \leq (1 + x)^n$.
2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n .
On les place toutes au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n ,
chaque boîte pouvant contenir de zéro à n boules.
Calculer la probabilité P_n pour que chaque boîte contienne exactement une boule.
3. On pose $P_n = \frac{n!}{n^n}$, où $n!$ désigne "factoriel n "
 - (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{P_n}{P_{n-1}} \geq 2$
 - (b) En déduire l'inégalité : $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1
 - (c) Calculer la limite de la suite (P_n) quand n tend vers $+\infty$

Partie B

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$,
 g l'endomorphisme de E_2 qui à un vecteur $u = xi + yj$ associe le vecteur
 $u' = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$

1. (a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijective.
(b) Déterminer le noyau Kerg et l'image Img de g .
(c) En déduire que $\text{Kerg} = \text{Img}$
2. Soit $\vec{v}$ un vecteur de Kerg .
Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$
3. Soit $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de coordonnées respectives $(-1; 2)$ et $(-1; 1)$
 - (a) Montre que $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E_2
 - (b) Donner la matrice de g dans la base B'

Partie C

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
on définit les trois points $A(1; 0)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et
la droite (D) dont une équation est $x = 1$

1. (a) Déterminer les coordonnées du point G tel que $CG = AB$
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?
2. On note (Γ) l'ensemble des points M de P ,
de coordonnées $(x; y)$, qui vérifient la relation : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)$
 - (a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ) .
 - (b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de P tels que : $MG = a\sqrt{2}$;
où a désigne la distance du point M à la droite (D)
 - (c) En déduire la nature de (Γ) et préciser son excentricité,
un de ses foyers et la directrice associée
3. Représenter (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$